

I. PT lượng giác đưa về dạng PT đại số:

Cần lưu ý một số vấn đề sau:

i) Chú ý công thức $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ về nguyên tắc

mọi PTLG đều có thể đại số hóa nhờ phép đặt ẩn phụ như trên, tuy nhiên lạm dụng nó đôi khi đưa đến PT rất kông kênh phức tạp. Ta cần chú ý một số biến đổi dưới đây khi ta bắt gặp.

ii) Với biểu thức: $\sin^4 x + \cos^4 x$, $\sin^6 x + \cos^6 x$ ta thường sử dụng biến đổi

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 2x$$

$$= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x, \dots$$

iii) Với PT đối xứng $\sin x$ và $\cos x$:

Đặt $t = \sin x + \cos x$, khi đó $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$, $|t| \leq \sqrt{2}$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{-t^3 + 3t}{2}, \quad \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{-t^4 + 2t^2 + 1}{2}, \dots$$

iv) PT đối xứng chứa $\tan x$ và $\cot x$ cần lưu ý:

đặt $t = \tan x + \cot x$, $|t| \geq 2$. Khi đó

$$\tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2; \quad \tan^3 x + \cot^3 x = t^3 - 3t \dots$$

v) Với PT đẳng cấp bậc hai, bậc ba với $\sin x$ và $\cos x$:

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x + d = 0.$$

$$a \sin^3 x + b \cos^3 x + c \sin \cos^2 x + d \sin^2 \cos x + m \sin x + n \cos x = 0$$

Cách giải:

+ Ktra $\cos x = 0$ có là nghiệm.

+ Với $\cos x \neq 0$. Đặt $t = \tan x$.

BÀI TẬP

Giải các PT sau:

Bài 1:

a. $3 \cos^4 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = 0$

b. $\tan x \sin^2 x - 2 \sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x)$

c. $4 \cos^3 x + 2 \sin^3 x - 3 \sin x = 0$

d. $\cos 2x + \cos(2 \tan^2 x - 1) = 2$

e. $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos x + \sin x$

f. $\sin x \sin 2x + \sin 3x = 6 \cos^3 x$

g. $\sin^3(x - \pi/4) = \sqrt{2} \sin x$

h. $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$

k. $3 \cot^2 x + 2 \sqrt{2} \sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2}) \cos x$

Bài 2:

a. $\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ b. $\tan x - 2\sqrt{2} \sin x = 1$

c. $\sin x + \cos x = \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\cot x}$

d. $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin 2x$

e. $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$

f. $1 + \sin^3 2x + \cos^3 2x = \frac{3}{2} \sin 4x$

g. $3(\cot x - \cos x) - 5(\tan x - \sin x) = 2$

h. $\cos^4 x + \sin^4 x - 2(1 - \sin^2 x \cos^2 x) \sin x \cos x - (\sin x + \cos x) = 0$

k. $\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}$

l. $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$

m. $\sin^3 x + \cos^3 x = 2 \sin x \cos x + \sin x + \cos x$

n. $3 \tan^2 x + 4 \tan x + 4 \cot x + 3 \cot^2 x + 2 = 0$

p. $\tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + \cot x + \cot^2 x + \cot^3 x = 6$

Bài 3:

a. $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = 1 - 2 \sin x$ b. $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{13}{8} \cos^2 2x$

c. $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2} (\tan x + \cot x)$

d. $\cos^6 x + \sin^6 x = 2(\cos^8 x + \sin^8 x)$

e. $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5 \sin 2x} = \frac{1}{2} \cot 2x - \frac{1}{8 \sin 2x}$

i. $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 2x$

k. $\sin^4 x + \cos^4 x +$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0 \text{ (KD - 2005)}$$

l. $\sin^6 x + \cos^6 x + \frac{1}{2} \sin x \cos x = 0$

m. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 4x + \cos^4 4x$

n. $\frac{1}{2}(\sin^4 x + \cos^4 x) = \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos x$

Bài 4:

a. $5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \tan^2 x$. (KB - 2004).

b. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 4 \sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)$

c. $\sin 2x (\cot x + \tan 2x) = 4 \cos^2 x$.

d. $\tan^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan x - 1$ e. $\sin 2x + 2 \tan x = 3$

Bài 5

1) Cho PT: $\cos 2x - (2m + 1) \cos x + m + 1 = 0$. Tìm m để PT

a. Có nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, một nghiệm $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

b. Có 2 nghiệm PB trên $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right); \left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$

2) Cho PT: $(\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m \sin^2 x$.

Tìm m để PT có đúng 2 nghiệm phân biệt trên

$$\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$$

II. PTLG đưa về dạng tích:

Cần chú ý một số kỹ năng sau:

1. Các công thức hạ bậc, tổng thành tích,...
2. Nếu PT có tổng của nhiều biểu thức dạng tích mà chúng lại không có thừa số chung thì nên biến đổi các tích thành tổng để ước lượng sau đó biến đổi lại thành tích.
3. Một số họ biểu thức dưới đây có thừa số chung.

Biểu thức chứa thừa số	f(x)
$\sin 2x, \sin 3x, \tan x, \tan 2x, \tan 3x, \dots$	$\sin x$
$\sin 2x, \cos 3x, \tan 2x, \cot 3x, \dots$	$\cos x$
$\cos^2 \frac{x}{2}, \cot^2 \frac{x}{2}, \sin^2 x, \tan^2 x, \dots$	$1 + \cos x$
$\sin^2 \frac{x}{2}, \tan^2 \frac{x}{2}, \sin^2 x, \tan^2 x, \dots$	$1 - \cos x$
$\cos^2 x, \cot^2 \frac{x}{2}, \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right), \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right), \dots$	$1 + \sin x$
$\cos^2 x, \cot^2 x, \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right), \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right), \dots$	$1 - \sin x$
$\cos 2x, \cot 2x, 1 + \sin 2x, 1 + \tan x, 1 + \cot x, \tan x - \cot x, \dots$	$\sin x + \cos x$
$\cos 2x, \cot 2x, 1 - \sin 2x, 1 - \tan x, 1 - \cot x, \tan x - \cot x, \dots$	$\sin x - \cos x$

BÀI TẬP: Giải các PT sau.

Bài 1:

- $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$
- $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 3/2$
- $\sin^2 x + \sin^2 3x - 3\cos^2 2x = 0$
- $\cos 3x + \sin 7x = 2\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5x}{2} \right) - 2\cos^2 \frac{9x}{2}$

Bài 2

- $\cos 2x - \cos 8x + \cos 4x = 1$
- $\sin x + 2\cos x + \cos 2x - 2\sin x \cos x = 0$
- $\sin 2x - \cos 2x = 3\sin x + \cos x - 2$
- $\sin^3 x + 2\cos x - 2 + \sin^2 x = 0$
- $3\sin x + 2\cos x = 2 + 3\tan x$
- $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \sqrt{2} \cos^2 x + \sqrt{6} \cos x = 0$
- $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$
- $2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}$
- $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$
- $\sin^2 x (\tan x + 1) = 3\sin x (\cos x - \sin x) + 3$
- $2\sin 3x - \frac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \frac{1}{\cos x}$
- $\tan x - \sin 2x - \cos 2x + 2 \left(2\cos x - \frac{1}{\cos x} \right) = 0$
- $\cos 2x - 2\cos^3 x + \sin x = 0$

q. $1 + \cot 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$

r. $2\tan x + \cot 2x = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$

s. $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

t.KA-02: Tìm n_0 thuộc $(0; 2\pi)$ của PT:

$$5 \left(\sin x + \frac{\cos x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x} \right) = \cos 2x + 3$$

Bài 3:

a. $\cos 3x \cos 4x + \sin 2x \sin 5x = \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 4x)$

b. $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$

c. $\tan x - \tan 2x = \sin x$

d. $4\cos x \sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = \cos 2x$

e. $\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = 0$

III. PHƯƠNG TRÌNH $a\sin x + b\cos x = c$.

Giải các PT:

1. $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2.$

2. $\tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$

3. $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \frac{3}{\cos x + \sqrt{3}\sin x + 1}$

4. $8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$

5.A09: $\frac{(1 - 2\sin x) \cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}.$

PT LƯƠNG GIÁC QUA CÁC KỲ THI TUYỂN SINH

ĐẠI HỌC TỪ 2002 - 2010

1. $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x.$ (KB - 02)

2. Tìm n_0 thuộc $[0; 14]$ của PT:

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$$
 (KD - 02)

3. $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x.$ (KA-03)

4. $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$ (KB - 03)

5. $\sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$ (KD - 03)

$$6.5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \tan^2 x. (KB - 04)$$

$$7.(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x. (KD - 04)$$

$$8. \cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0 (A-05)$$

$$9. \frac{2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0 (KA - 06)$$

$$10. \cot x + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) = 4 (KB - 06)$$

$$11. \cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0 (KD-06)$$

$$12. (1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x$$

(KA - 07)

$$13. 2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x (KB - 07)$$

$$14. \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2 (KA - 07)$$

$$15. \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin \left(x - \frac{3\pi}{2} \right)} = 4 \sin \left(\frac{7\pi}{4} - x \right). (KA - 08)$$

$$16. \sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x.$$

(KB - 08)

$$17. 2 \sin x (1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x.$$

(D - 08)

$$18. \sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x).$$

(KB - 09)

$$19. \sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0. (D - 09)$$

$$20. \frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x.$$

(KA - 10)

$$21. (\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0.$$

(KB - 10)